

基于协方差匹配技术的互耦和幅相误差联合校正算法

王 鼎,姚 晖,吴 瑛

(解放军信息工程大学信息工程学院,河南郑州 450002)

摘 要: 提出了基于协方差匹配技术的均匀线阵互耦和幅相误差联合校正算法.首先,根据协方差匹配技术中的目标函数和均匀线阵的误差模型,设计了一种交替迭代算法用以实现各种参数的优化计算.接着,为了避免该算法中的每轮循环迭代都需要进行波达方向估计这一复杂环节,利用理想条件均匀线阵协方差阵的 Toeplitz 性,给出了另一种改进型交替迭代算法用以减少计算复杂度.与基于子空间技术的阵列误差校正方法相比,文中的两种新算法可直接利用信源的统计特性,并且适用于不同的高斯噪声模型(例如噪声功率不一致),仿真实验验证了新算法的有效性和优越性.

关键词: 阵列误差校正;均匀线阵;互耦;阵元幅相误差;Toeplitz 矩阵;协方差匹配技术

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 03-0580-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.03.028

The Joint Calibration Algorithms of Mutual Coupling and Gain-and-Phase Errors Based on Covariance Matching Technique

WANG Ding, YAO Hui, WU Ying

(Institute of Information Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou, Henan 450002, China)

Abstract: The joint calibration method of mutual coupling and gain-and-phase errors based on covariance matching estimation technique (COMET) are proposed for the uniform linear array (ULA). According to the cost function of the COMET and the errors model of the ULA, an alternative iteration algorithm is presented to optimize all the unknown parameters. In order to avoid the complicated step concerning the DOA estimation in each of iteration, an improved alternative iteration algorithm is presented to reduce the computation complexity via making use of the Toeplitz structure of the covariance matrix for the ULA. Compared with the errors calibration methods based on subspace technique, the two novel algorithms are capable of directly exploiting the time-domain statistical characteristic of the sources and are applicable to different Gaussian noise models, e. g., the case of nonuniform noise power. The simulation experiments validate the effectiveness and advantage of the novel algorithms.

Key words: array errors calibration; uniform linear array (ULA); mutual coupling; sensor gain-and-phase errors; Toeplitz matrix; covariance matching estimation technique (COMET)

1 引言

阵列误差校正方法可分为有源校正^[1~4]和自校正^[5~11]两大类.无论哪一类,一种最重要的处理方式是将误差校正问题转化为参数估计问题,并进行优化求解.文献[1]提出基于最大似然(Maximum Likelihood, ML)准则的幅相误差估计方法.文献[2]基于噪声子空间拟合准则,给出幅相误差渐近最优估计方法.文献[3,4]利用若干分时工作的校正源估计出一组阵列流型向量的数值,并基于此求解阵列误差参数.文献[5]利用子空间技术构造类似 MUSIC 算法的目标函数,并利用交替迭代实现各种参数的优化计算.

为了能够利用信源的时域统计信息,一类基于阵列协方差阵结构特征的误差校正方法得到广泛研究.例如,文献[6]针对理想条件均匀线阵协方差阵的 Toeplitz 结构(信源统计独立时),利用协方差阵同一对角线元素估计幅相误差,进而估计信源方位(Direction of Arrival, DOA),文献[7]对该方法作了深入理论分析和讨论.文献[8]提出阵列互耦校正方法,其中根据协方差阵的数学模型构造二次目标函数,并利用均匀线阵互耦矩阵和协方差阵的特殊结构,通过交替迭代实现参数优化,文献[9]将该方法推广于均匀线阵互耦和幅相误差联合校正.事实上,文献[8,9]中构造的目标函数可归于一类基于协方差匹配技术(Covariance Matching Estimation

Technique, COMET)^[12]的参数估计方法,但文献[8,9]中的目标函数并未引入最优加权矩阵,而文献[12]中的理论分析表明引入最优加权矩阵可使参数估计性能渐近最优,即性能曲线渐近逼近克拉美罗界(Cramér-Rao Bound, CRB).文献[10]正是基于 COMET,提出阵列幅相误差校正方法,仿真实验表明通过引入最优加权矩阵有利于提高参数估计精度.

本文针对均匀线阵,给出了基于 COMET 的互耦和幅相误差联合校正方法,其实现方式是交替迭代.与基于子空间技术的阵列误差校正方法相比,文中的算法可直接利用信源时域统计特性,这有助于提高参数估计精度,并且可适用于不同的高斯噪声模型(例如噪声功率不一致).

2 阵列信号模型与问题提出

考虑某 M 元均匀线阵,其中同时存在互耦和阵元幅相误差,现有 D 个窄带信源(可能是待测信源或校正源)到达该阵列,其中第 k 个信源的方位为 θ_k (可能已知也可能未知),则阵列输出响应为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中 $\mathbf{s}(t)$ 为时域白的复圆高斯信源包络, $\mathbf{n}(t)$ 为空时白的复圆高斯噪声, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}(\theta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(\theta_D)]$ 为阵列方向矩阵.此外, $\mathbf{M} = \mathbf{C} \mathbf{T}$ 表示阵列误差矩阵,其中 $\mathbf{T} = \text{diag}[\tau_1 \quad \tau_2 \quad \cdots \quad \tau_M]$ 为幅相误差对角矩阵, τ_m 表示第 m 个阵元的幅相响应, \mathbf{C} 为互耦矩阵,它可建模为复对称 Toeplitz 矩阵^[5],即有

$$\mathbf{C} = c_1 \mathbf{I}_M + \sum_{l=2}^L c_l \mathbf{H}_M^{(l)} = \text{SToeplitz}\{[c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_L]\} \quad (2)$$

式中 c_l 表示互耦因子, L 表示仅在最近邻 L 个阵元之间产生互耦效应, $\text{SToeplitz}\{\cdot\}$ 表示由向量确定的对称 Toeplitz 矩阵.

假设信源与信源之间、信源与噪声之间都统计独立,则阵列输出协方差阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_y &= E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)] = \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H \mathbf{T}^H \mathbf{C}^H + \mathbf{R}_n \\ &= \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{S}_y \mathbf{T}^H \mathbf{C}^H + \mathbf{R}_n = \mathbf{S}_y + \mathbf{R}_n \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\mathbf{R}_s = \text{diag}[p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_D]$ 表示信源协方差阵,其中 p_k 为第 k 个信源功率, $\mathbf{R}_n = \text{diag}[q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_M]$ 表示噪声协方差阵,其中 q_m 表示第 m 个阵元的加性噪声功率,若阵元加性噪声功率相等,则 \mathbf{R}_n 可表示为 $\mathbf{R}_n = q_m \mathbf{I}_M$,即 \mathbf{R}_n 仅有一个未知参数,若各阵元的物理差异导致噪声功率不相等,则 \mathbf{R}_n 中有 M 个未知参数.此外, $\mathbf{S}_y = \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{S}_x \mathbf{T}^H \mathbf{C}^H$ 表示无噪但存在阵列误差时的协方差阵,其中 $\mathbf{S}_x = \mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H$ 表示无噪且无阵列误差时的协方差阵,该矩阵同时具有 Hermitian 和 Toeplitz 性,于

是可将其表示为^[13]

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_x &= \rho_1 \mathbf{I}_M + \sum_{m=2}^M (\text{Re}\{\rho_m\} \cdot \widehat{\mathbf{H}}_M^{(m)} + \text{j} \cdot \text{Im}\{\rho_m\} \cdot \widetilde{\mathbf{H}}_M^{(m)}) \\ &= \text{HToeplitz}\{[\rho_1 \quad \cdots \quad \rho_M]\} \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\widehat{\mathbf{H}}_M^{(m)} = \mathbf{T} \mathbf{T}^{(m)} + \mathbf{T} \mathbf{T}^{(m)T}$ 和 $\widetilde{\mathbf{H}}_M^{(m)} = \mathbf{T} \mathbf{T}^{(m)} - \mathbf{T} \mathbf{T}^{(m)T}$, 其中 $\mathbf{T} \mathbf{T}^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{(M-m+1) \times (m-1)} & \mathbf{I}_{M-m+1} \\ \mathbf{O}_{(m-1) \times (m-1)} & \mathbf{O}_{(m-1) \times (M-m+1)} \end{bmatrix}$, $\text{HToeplitz}\{\cdot\}$ 表示由向量确定的 Hermitian 和 Toeplitz 矩阵.

由于式(1)中 \mathbf{C} 、 \mathbf{T} 和 $\mathbf{s}(t)$ 之间的级乘关系,需要对其中两个变量施加标量约束,不妨令 $\tau_1 = c_1 = 1$,另一方面,对于均匀线阵,阵元的相位响应与信源方位的耦合会使参数的可辨识性无法保证(针对自校正情况)^[11],为了避免该问题,这里假设 $\tau_1 = \tau_2 = 1$,即前两个阵元的幅相特性一致.为了便于参数统一描述,在文中的有源校正中该假设同样成立,于是文中的所有(实)参数向量 $\boldsymbol{\eta}$ 可表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_{\text{active}} = [\bar{\mathbf{c}}_r^T \quad \bar{\mathbf{c}}_i^T \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_r^T \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_i^T \quad \mathbf{p}^T \quad \mathbf{q}^T]^T \\ \boldsymbol{\eta}_{\text{self}} = [\bar{\mathbf{c}}_r^T \quad \bar{\mathbf{c}}_i^T \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_r^T \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_i^T \quad \mathbf{p}^T \quad \mathbf{q}^T \quad \boldsymbol{\theta}^T]^T \end{cases} \quad (5)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}_r &= [c_{r2} \quad c_{r3} \quad \cdots \quad c_{rL}]^T, \quad \bar{\mathbf{c}}_i = [c_{i2} \quad c_{i3} \quad \cdots \quad c_{iL}]^T, \\ \bar{\boldsymbol{\tau}}_r &= [\tau_{r3} \quad \tau_{r4} \quad \cdots \quad \tau_{rM}]^T, \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_i = [\tau_{i3} \quad \tau_{i4} \quad \cdots \quad \tau_{iM}]^T, \\ \mathbf{p} &= [p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_D]^T, \quad \mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_M]^T, \\ \boldsymbol{\theta} &= [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_D]^T. \end{aligned}$$

其中 $c_{rl} = \text{Re}\{c_l\}$, $c_{il} = \text{Im}\{c_l\}$, $\tau_{rm} = \text{Re}\{\tau_m\}$ 和 $\tau_{im} = \text{Im}\{\tau_m\}$. 下面的问题为如何在有限样本条件下联合估计上述未知参数.

3 基于协方差匹配技术的阵列误差校正

3.1 基于协方差匹配的目标函数的构造

参数向量 $\boldsymbol{\eta}$ 的渐近有效估计可通过 ML 估计器^[14]获得,但 ML 估计器所构造的是高维、多模非线性优化函数^[14],其求解非常复杂,为此这里引出 COMET^[12],它在大样本条件下与 ML 估计器渐近等价,可见如下加权最小二乘优化模型^[10,12,13]

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{COMET}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} J = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \|\widehat{\mathbf{W}}_c(\mathbf{R}_y(\boldsymbol{\eta}) - \hat{\mathbf{R}}_y)\widehat{\mathbf{W}}_c\|_F^2 \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \|\widehat{\mathbf{W}}_c(\mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H \mathbf{T}^H \mathbf{C}^H + \mathbf{R}_n - \hat{\mathbf{R}}_y)\widehat{\mathbf{W}}_c\|_F^2 \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\mathbf{r}_y(\boldsymbol{\eta}) = \text{vec}(\mathbf{R}_y(\boldsymbol{\eta}))$, $\hat{\mathbf{r}}_y = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_y)$, $\widehat{\mathbf{W}}_c = \hat{\mathbf{R}}_y^{-1/2}$ 和 $\widehat{\mathbf{W}}_{\text{opt}} = \hat{\mathbf{R}}_y^{-T} \hat{\mathbf{R}}_y^{-1}$. 尽管式(6)比 ML 估计器在形式上更为简单,但仍难以给出闭式解,只能通过迭代进行优化计算,下面给出求解式(6)的交替迭代算法.

3.2 交替迭代算法

3.2.1 交替迭代算法(算法 I)的基本思想和计算环节

仔细分析式(6)可知:首先,式(6)是关于 \mathbf{R}_y 和 \mathbf{R}_n 的二次函数,其闭式解可以直接给出;接着,式(6)是关

于 C 和 Γ 的四次函数,其闭式解难以给出,但可通过类似于文献[8,9]中的处理方法,分别将 C 和 C^H 看作是两个独立变量 C_1 和 C_2 ,将 Γ 和 Γ^H 也看作是两个独立变量 Γ_1 和 Γ_2 ,此时式(6)是关于参量 C_1, C_2, Γ_1 和 Γ_2 的二次函数,其闭式解也可以直接给出;最后,在校正情况下,需要考虑 θ 的优化,相比其它参数,式(6)关于 θ 的非线性程度最高,但可直接通过超分辨率算法进行求解.根据上述分析,可建立如下新的优化模型,并针对该模型进行优化求解.

$$\{\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2, \hat{R}_s, \hat{R}_n, \hat{\theta}\}$$

$$= \arg \min_{C_1, C_2, \Gamma_1, \Gamma_2, R_s, R_n, \theta} J_1$$

$$= \arg \min_{C_1, C_2, \Gamma_1, \Gamma_2, R_s, R_n, \theta} \|\hat{W}_c(C_1 \Gamma_1 A R_s A^H \Gamma_2 C_2 + R_n - \hat{R}_y) \hat{W}_c\|_F^2 \quad (7)$$

首先考虑估计 C_1 ,由于 C_1 是一个复对称 Toeplitz 矩阵,下面的定理给出了它的一个重要性质,该性质对于 C_1 的求解起着关键的作用.

定理 1 若 C 为 M 阶复对称 Toeplitz 矩阵(如式(2)形式), a 为任意 M 维复向量,则有如下等式^[5]

$$Ca = T(a)c \quad (8)$$

式中 c 为 C 的第一列前 $L(L \leq M)$ 个元素构成的列向量, $T(a)$ 是由向量 a 确定的 $M \times L$ 阶矩阵,满足

$$T(a) = T_1(a) + T_2(a) \quad (9)$$

其中 $T_1(a)$ 和 $T_2(a)$ 的表达式见文献[5].

若令 $F_1 = \Gamma_1 A R_s A^H \Gamma_2 C_2 \hat{W}_c$ 和 $E = (\hat{R}_y - R_n) \hat{W}_c$,并分别记 F_1 和 E 的第 k 列分别为 f_{1k} 和 e_k ,则根据定理 1 可将 J_1 表示为

$$J_1 = \|\hat{W}_c C_1 F_1 - \hat{W}_c E\|_F^2$$

$$= \sum_{k=1}^M \|\hat{W}_c T(f_{1k}) c_1 - \hat{W}_c e_k\|_2^2 \quad (10)$$

式中 c_1 为 C_1 的第一列前 $L(L \leq M)$ 个元素构成的列向量.易知,使式(10)取最小值的最优闭式解为

$$\hat{c}_{1, \text{opt}} = \left(\sum_{k=1}^M T^H(f_{1k}) \hat{R}_y^{-1} T(f_{1k}) \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^M T^H(f_{1k}) \hat{R}_y^{-1} e_k \right) \quad (11)$$

为了保证 $\hat{c}_{1, \text{opt}}$ 的第一个分量为 1,需要对式(11)作归一处理,而 C_1 的估计值为 $\hat{C}_1 = \text{SToeplitz}\{\hat{c}_{1, \text{opt}}\}$.

下面考虑估计 C_2 .若令 $F_2 = \Gamma_2^* A R_s A^H \Gamma_1^* C_1^* \hat{W}_c$,并记 F_2 的第 k 列为 f_{2k} ,则根据定理 1 可将 J_1 表示为

$$J_1 = \|\hat{W}_c C_2^* F_2 - \hat{W}_c E\|_F^2 = \sum_{k=1}^M \|\hat{W}_c T(f_{2k}) c_2^* - \hat{W}_c e_k\|_2^2 \quad (12)$$

式中 c_2 为 C_2 的第一列前 $L(L \leq M)$ 个元素构成的列向量.易知,使式(12)取最小值的最优闭式解为

$$\hat{c}_{2, \text{opt}} = \left(\sum_{k=1}^M T^T(f_{2k}) (\hat{R}_y^*)^{-1} T^*(f_{2k}) \right)^{-1}$$

$$\cdot \left(\sum_{k=1}^M T^T(f_{2k}) (\hat{R}_y^*)^{-1} e_k^* \right) \quad (13)$$

为了保证 $\hat{c}_{2, \text{opt}}$ 的第一个分量为 1,同样需要对式(13)作归一处理,而 C_2 的估计值为 $\hat{C}_2 = \text{SToeplitz}\{\hat{c}_{2, \text{opt}}\}$.

下面考虑估计 Γ_1 .若令 $F_3 = A R_s A^H \Gamma_2 C_2 \hat{W}_c$,并记 F_3 的第 k 列为 f_{3k} ,则可将 J_1 表示为

$$J_1 = \sum_{k=1}^M \|\hat{W}_c C_1 \cdot \text{diag}[f_{3k}] \cdot \Pi_M \tau_1 - \hat{W}_c e_k\|_2^2 \quad (14)$$

式中 $\Pi_M = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times (M-2)} \\ \mathbf{0}_{(M-2) \times 1} & \mathbf{I}_{M-2} \end{bmatrix}$, τ_1 表示 Γ_1 的第 2 至第 M 个对角元素构成的列向量.易知,使式(14)取最小值的最优闭式解为

$$\hat{\tau}_{1, \text{opt}} = \left(\sum_{k=1}^M \Pi_M^T \cdot \text{diag}[f_{3k}^*] \cdot C_1^* \hat{R}_y^{-1} C_1 \cdot \text{diag}[f_{3k}] \cdot \Pi_M \right)^{-1}$$

$$\cdot \left(\sum_{k=1}^M \Pi_M^T \cdot \text{diag}[f_{3k}^*] \cdot C_1^* \hat{R}_y^{-1} e_k \right) \quad (15)$$

为了保证 $\hat{\tau}_{1, \text{opt}}$ 的第一个分量为 1,同样需要对式(15)作归一处理,而 Γ_1 的估计值为 $\hat{\Gamma}_1 = \text{diag}[\Pi_M \hat{\tau}_{1, \text{opt}}]$.

下面考虑估计 Γ_2 .若令 $F_4 = A R_s A^H \Gamma_1^* C_1^* \hat{W}_c$,并记 F_4 的第 k 列为 f_{4k} ,则可将 J_1 表示为

$$J_1 = \sum_{k=1}^M \|\hat{W}_c C_2^* \cdot \text{diag}[f_{4k}] \cdot \Pi_M \tau_2 - \hat{W}_c e_k\|_2^2 \quad (16)$$

式中 τ_2 表示 Γ_2 的第 2 至第 M 个对角元素构成的列向量.易知,使式(16)取最小值的最优闭式解为

$$\hat{\tau}_{2, \text{opt}} = \left(\sum_{k=1}^M \Pi_M^T \cdot \text{diag}[f_{4k}] \cdot C_2^* (\hat{R}_y^*)^{-1} C_2 \cdot \text{diag}[f_{4k}^*] \cdot \Pi_M \right)^{-1}$$

$$\cdot \left(\sum_{k=1}^M \Pi_M^T \cdot \text{diag}[f_{4k}] \cdot C_2^* (\hat{R}_y^*)^{-1} e_k^* \right) \quad (17)$$

为了保证 $\hat{\tau}_{2, \text{opt}}$ 的第一个分量为 1,同样需要对式(17)作归一处理,而 Γ_2 的估计值为 $\hat{\Gamma}_2 = \text{diag}[\Pi_M \hat{\tau}_{2, \text{opt}}]$.

下面考虑估计 R_s ,由于 R_s 和 R_n 均为对角矩阵,可将目标函数 J_1 表示为

$$J_1 = \|F_5 p - f_1\|_2^2 \quad (18)$$

式中

$$\begin{cases} F_5 = (\hat{W}_c^* C_2 \Gamma_2 A^*) \circ (\hat{W}_c C_1 \Gamma_1 A) \\ f_1 = (\hat{W}_c^* \otimes \hat{W}_c) \hat{r}_y - (\hat{W}_c^* \cdot \hat{W}_c) q \end{cases} \quad (19)$$

式中 \circ 表示矩阵的 Column-wise Kronecker 积^[10].易知,使式(18)取最小值的最优闭式解为

$$\hat{p}_{\text{opt}} = \text{Re}^{-1}\{F_5^H F_5\} \cdot \text{Re}\{F_5^H f_1\} \quad (20)$$

而 R_s 的估计值为 $\hat{R}_s = \text{diag}[\hat{p}_{\text{opt}}]$.

下面考虑估计 R_n ,可将目标函数 J_1 表示为

$$J_1 = \|F_6 q - f_2\|_2^2 \quad (21)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{F}_6 = \hat{\mathbf{W}}_c^* \circ \hat{\mathbf{W}}_c \\ \mathbf{f}_2 = (\hat{\mathbf{W}}_c^* \otimes \hat{\mathbf{W}}_c) \hat{\mathbf{r}}_y - ((\hat{\mathbf{W}}_c^* \mathbf{C}_2 \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{A}^*) \circ (\hat{\mathbf{W}}_c \mathbf{C}_1 \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{A})) \mathbf{p} \end{cases} \quad (22)$$

易知,当阵元噪声功率不一致时,使式(21)取最小值的最优闭式解为

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{opt}} = \text{Re}^{-1} \{ \mathbf{F}_6^H \mathbf{F}_6 \} \cdot \text{Re} \{ \mathbf{F}_6^H \mathbf{f}_2 \} \quad (23)$$

当阵元噪声功率一致时,根据文献[14],可直接给出关于噪声功率向量 \mathbf{q} 的最大似然估计值为

$$\mathbf{q}_{\text{ML}} = \frac{1}{M-D} \text{tr} \{ [\mathbf{I}_M - \mathbf{C} \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} (\mathbf{C} \mathbf{\Gamma} \mathbf{A})^\dagger] \mathbf{R}_y \} \cdot \mathbf{1}_{M \times 1} \quad (24)$$

式(24)中的 \mathbf{C} 和 $\mathbf{\Gamma}$ 可分别用 $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2^H)/2$ 和 $\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_2^H)/2$ 代替,而 \mathbf{R}_n 的估计为 $\hat{\mathbf{R}}_n = \text{diag} \{ \hat{\mathbf{q}}_{\text{opt}} \}$.

最后考虑估计 $\boldsymbol{\theta}$,它可直接通过超分辨率算法进行求解,当噪声功率不一致时,需要对协方差阵 $\hat{\mathbf{R}}_y$ 进行预白化处理 $\hat{\mathbf{R}}_{y0} = \mathbf{R}_n^{-1/2} \hat{\mathbf{R}}_y \mathbf{R}_n^{-1/2}$,该协方差阵对应的阵列流型矩阵为 $\mathbf{A}_0 = \mathbf{R}_n^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{\Gamma} \mathbf{A}$.

至此,本小节已给出了交替迭代算法的全部计算环节,依次计算直至收敛即为完整的交替迭代算法(称为算法 I),限于篇幅这里不再总结全部计算步骤.算法 I 既可用于阵列误差有源校正算法(忽略 DOA 估计),也可用作阵列误差自校正算法.需要指出的是,算法 I 用于阵列误差自校正时,在每轮迭代中都需要进行 DOA 估计,这其中难免涉及谱峰搜索或多维非线性优化,为了避免在每次循环迭代中都需要进行 DOA 估计,下面给出一种改进型交替迭代算法,该算法利用矩阵 \mathbf{S}_x 的 Toeplitz 特性,可减少计算复杂度.

3.2.2 一种改进型交替迭代算法(算法 II)

结合第 3.2.1 小节的分析这里考虑如下优化模型

$$\begin{aligned} & \{ \hat{\mathbf{C}}_1, \hat{\mathbf{C}}_2, \hat{\mathbf{\Gamma}}_1, \hat{\mathbf{\Gamma}}_2, \hat{\mathbf{S}}_x, \hat{\mathbf{R}}_n \} = \arg \min_{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2, \mathbf{S}_x, \mathbf{R}_n} J_2 \\ & = \arg \min_{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2, \mathbf{S}_x, \mathbf{R}_n} \| \hat{\mathbf{W}}_c (\mathbf{C}_1 \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{S}_x \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{C}_2 + \mathbf{R}_n - \hat{\mathbf{R}}_y) \hat{\mathbf{W}}_c^T \|_F^2 \end{aligned} \quad (25)$$

显然, J_2 是关于所有单个矩阵变量的二次函数,它们的闭式解能够分别直接给出,并且其中关于 \mathbf{C}_1 、 \mathbf{C}_2 、 $\mathbf{\Gamma}_1$ 、 $\mathbf{\Gamma}_2$ 和 \mathbf{R}_n 的优化过程与算法 I 类似,这里不再重复,仅考虑估计 \mathbf{S}_x ,结合式(4)可将 J_2 表示为

$$J_2 = \| \mathbf{G} \boldsymbol{\rho} - \mathbf{g} \|_2^2 \quad (26)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{G} = ((\hat{\mathbf{W}}_c^* \mathbf{C}_2 \mathbf{\Gamma}_2) \otimes (\hat{\mathbf{W}}_c \mathbf{C}_1 \mathbf{\Gamma}_1)) \boldsymbol{\Omega}_M \\ \mathbf{g} = (\hat{\mathbf{W}}_c^* \otimes \hat{\mathbf{W}}_c) \hat{\mathbf{r}}_y - (\hat{\mathbf{W}}_c^* \circ \hat{\mathbf{W}}_c) \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\rho} = [\rho_0 \text{Re} \{ \rho_1 \} \text{Im} \{ \rho_1 \} \cdots \text{Re} \{ \rho_{M-1} \} \text{Im} \{ \rho_{M-1} \}]^T \\ \boldsymbol{\Omega}_M = [\text{vec}(\mathbf{I}_M) \text{vec}(\hat{\mathbf{H}}_M^{(2)}) \mathbf{j} \cdot \text{vec}(\hat{\mathbf{H}}_M^{(2)}) \cdots \\ \cdots \text{vec}(\hat{\mathbf{H}}_M^{(M)}) \mathbf{j} \cdot \text{vec}(\hat{\mathbf{H}}_M^{(M)})] \end{cases} \quad (27)$$

易知,使式(26)取最小值的最优闭式解为

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\text{opt}} = \text{Re}^{-1} \{ \mathbf{G}^H \mathbf{G} \} \cdot \text{Re} \{ \mathbf{G}^H \mathbf{g} \} \quad (28)$$

于是 \mathbf{S}_x 的估计值为 $\hat{\mathbf{S}}_x = \text{HToeplitz}[\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\text{opt}}]$.

将 \mathbf{S}_x 的估计环节直接代替算法 I 中的 \mathbf{R}_s 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计环节即可得到一种改进型交替迭代算法(即算法 II),限于篇幅这里也不再总结全部计算步骤.

4 算法仿真

4.1 验证算法 I 和算法 II 有效性的仿真实验

假设阵列流型为 10 元均匀线阵,相邻阵元间距为半波长,阵元幅相误差、互耦因子和加性噪声功率可见表 1 至表 3,现有 3 个等功率独立高斯待测信源到达该阵列,其方位(指与线阵所在直线的夹角)分别为 60° 、 80° 和 100° ,信噪比(指信号与平均噪声功率的比值)均为 10dB,样本点数为 750.图 1 和图 2 分别给出了在单次实验中,经算法 I 和算法 II 对阵列误差进行校正前后的 MUSIC 空域谱曲线;表 1 至表 3 分别给出了经 200 次独立实验后,算法 I 和算法 II 所估计的幅相误差、互耦因子以及阵元噪声功率的均值.

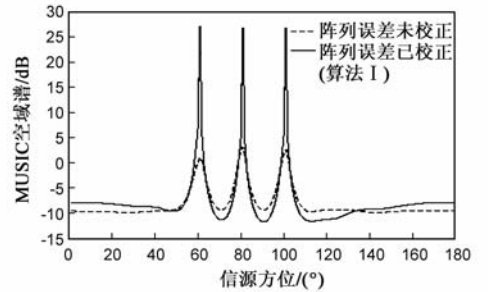


图1 阵列误差校正前后的MUSIC空域谱(算法I)

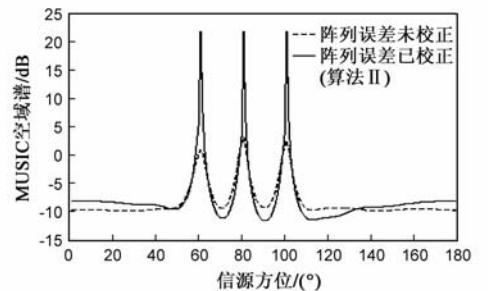


图2 阵列误差校正前后的MUSIC空域谱(算法II)

表 1 幅相误差真实值和估计均值

阵元标号	真实值	估计均值(算法 I)	估计均值(算法 II)
1	1.0000 + 0.0000j	1.0000 + 0.0000j	1.0000 + 0.0000j
2	1.0000 + 0.0000j	1.0000 + 0.0000j	1.0000 + 0.0000j
3	1.1721 - 0.4345j	1.1705 - 0.4356j	1.1717 - 0.4367j
4	0.8333 + 0.2827j	0.8337 + 0.2803j	0.8344 + 0.2799j
5	0.7622 - 0.3025j	0.7607 - 0.3044j	0.7609 - 0.3053j
6	1.1476 + 0.2745j	1.1479 + 0.2706j	1.1477 + 0.2690j
7	0.8909 - 0.2296j	0.8890 - 0.2314j	0.8888 - 0.2335j
8	1.1912 + 0.2634j	1.1892 + 0.2580j	1.1911 + 0.2558j
9	0.8020 + 0.2497j	0.8013 + 0.2443j	0.8030 + 0.2433j
10	1.3057 - 0.4149j	1.2998 - 0.4212j	1.2988 - 0.4243j

表 2 互耦因子真实值和估计均值

互耦因子 标号	真实值	估计均值 (算法 I)	估计均值 (算法 II)
1	1.0000 + 0.0000j	1.0000 + 0.0000j	1.0000 + 0.0000j
2	0.1300 - 0.1200j	0.1297 - 0.1201j	0.1298 - 0.1196j
3	-0.0400 + 0.0500j	-0.0395 + 0.0502j	-0.0394 + 0.0503j

表 3 噪声功率真实值和估计均值

阵元标号	真实值	估计均值(算法 I)	估计均值(算法 II)
1	1.4600	1.4298	1.4301
2	1.1200	1.1044	1.1050
3	0.7500	0.7359	0.7359
4	1.2400	1.2213	1.2194
5	0.6200	0.6068	0.5993
6	1.3100	1.2836	1.2860
7	0.6600	0.6446	0.6467
8	1.0800	1.0610	1.0505
9	0.8200	0.8057	0.8095
10	0.9400	0.9351	0.9280

从实验结果中可以看出,在上述仿真条件下,两种算法都能较准确估计幅相误差、互耦因子以及各阵元的加性噪声功率,并且误差校正后的空域谱峰明显比校正前尖锐,从而能够准确估计信源方位.经数值统计可知在上述仿真条件下,算法 I 的平均迭代次数为 10.99,算法 II 的平均迭代次数为 13.14.

4.2 算法 I 和算法 II 的性能比较

假设阵列流型为 9 元均匀线阵,相邻阵元间距为半波长,各阵元的幅度因子分别为 1.00, 1.00, 1.14, 0.95, 1.18, 0.87, 0.91, 1.09 和 0.92, 相位因子分别为 0.00° , 0.00° , -15.25° , 15.85° , -16.29° , -12.67° , 16.84° , -14.82° 和 15.28° , 并且仅考虑相邻 3 个阵元之间的互耦效应,相应的互耦因子分别为 $1.00 + 0.00j$, $0.14 + 0.12j$ 和 $-0.03 + 0.04j$, 各阵元的加性噪声功率一致,其值为 1, 现有 3 个等功率独立高斯待测信源到达该阵列,其方位分别为 70° , 90° 和 110° , 样本点数为 750. 图 3 至图 5 分别给出了幅相误差、互耦和信源方位估计均方根误差随着待测信源信噪比的变化曲线.需要指出的是,这里 DOA 估计采用 MUSIC 算法.

从以上实验结果中可以看出,在上述仿真条件下,无论是算法 I 还是算法 II,通过引入最优加权矩阵,都有利于提高算法的参数估计精度.另一方面,比较算法 I 和算法 II 可知,算法 I 的参数估计精度要占有一定优势,其主要原因在于将矩阵 S_x 作为整体参量进行估计损失了部分参数信息,但随着待测信源信噪比的增加,算法 II 的性能迅速逼近算法 I,甚至在其它仿真中发现在高信噪比条件下,算法 II 的性能可能略优于算法 I,这是因为在算法 I 需要估计信源功率,而在高信噪比条件下,信源功率数值较大,因此即便在估计精度较高的情况下也容易在数值引起较大差异,从而影响其它参

量的估计,此时需要更好的初值加以克服.此外,从图 5 中可以看出,经算法 I 和算法 II 校正后的 DOA 估计精度能够得到明显改善.

为了突出算法 II 在计算复杂度上的优势,下面在同一仿真环境下,通过合理优化程序比较算法 I 和算法 II 的平均运行时间(在 MATLAB7.0 平台上).为了便于比较,这里将算法 I 和算法 II 的迭代次数均固定为 30 次(通常这已足够保证收敛),仿真条件完全同上.表 4 给出了算法 I 和算法 II 的平均运行时间(400 次独立实验取均值)随着待测信源信噪比的数值,这里 MUSIC 算法的搜索步长为 0.1° .

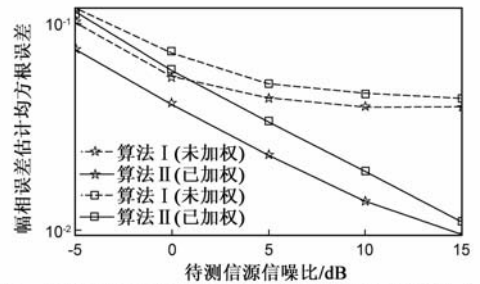


图 3 幅相误差估计均方根误差随着信噪比的变化曲线

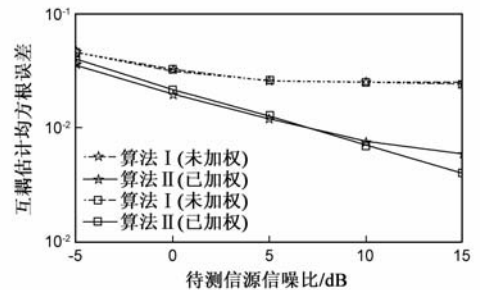


图 4 互耦估计均方根误差随着信噪比的变化曲线

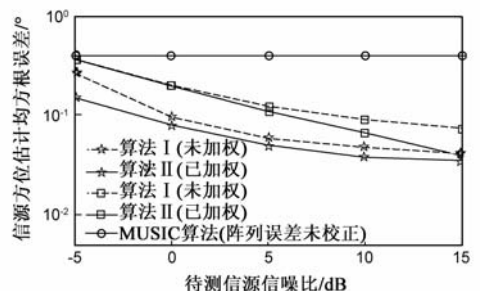


图 5 信源方位估计均方根误差随着信噪比的变化曲线

表 4 算法 I 和算法 II 的平均运行时间数值

信噪比/dB	算法 I 运行时间/s	算法 II 运行时间/s
-5	0.3585	0.1928
0	0.3588	0.1960
5	0.3546	0.1953
10	0.3524	0.1943
15	0.3531	0.1946

从以上实验结果中可以看出,在上述仿真条件下,算法 II 的运行时间明显小于算法 I,算法 II 的运行时间约为算法 I 运行时间的 54.4%,这验证了算法 II 在计算复杂度上的优势。

4.3 与其它阵列误差校正算法的性能比较

这里不妨与文献[5]中的方法进行比较(文中称为 FW 方法),限于篇幅,这里仅比较阵列误差参数的校正精度,因此这里将 FW 方法作为有源校正方法使用,即忽略 DOA 估计环节,并将 FW 方法与算法 I 进行比较,此时算法 I 也作为有源校正方法使用.仿真条件如下:假设阵列流型为 8 元均匀线阵,相邻阵元间距为半波长,各阵元的幅度因子分别为 1.00, 1.00, 0.78, 1.27, 1.16, 0.84, 0.88 和 1.17,相位因子分别为 0.00° , 0.00° , 24.72° , -16.83° , 14.39° , 18.19° , -15.72° 和 15.23° ,并且考虑相邻 4 个阵元之间的互耦效应,相应的互耦因子分别为 $1.00 + 0.00j$, $-0.23 + 0.20j$, $-0.15 - 0.11j$ 和 $0.04 + 0.03j$,各阵元的加性噪声功率一致,其值为 1,现有 3 个等功率独立高斯校正源(方位已知)到达该阵列,其方位分别为 30° , 45° 和 60° ,样本点数为 750.图 6 和图 7 分别给出了幅相误差和互耦估计均方根误差随着校正源信噪比的变化曲线。

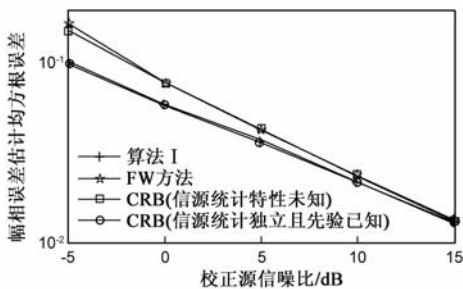


图6 幅相误差估计均方根误差随着校正源信噪比的变化曲线

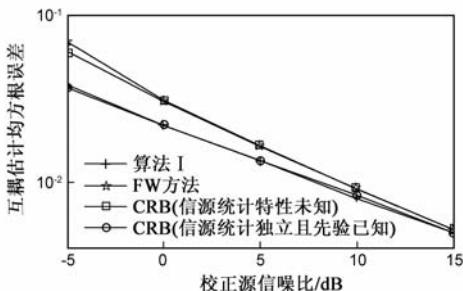


图7 互耦估计均方根误差随着校正源信噪比的变化曲线

从以上实验结果中可以看出,在上述仿真条件下,由于 COMET 能够直接利用信源的先验时域统计独立性,因此其参数估计精度高于 FW 方法,并且不难看出,算法 I 是渐近有效的,在高信噪比条件下,其性能曲线逼近信源统计独立且先验已知时的 CRB,而 FW 方法只能逼近信源统计特性未知时的 CRB,其数值必然大于

信源统计独立且先验已知时的 CRB.

5 结束语

针对均匀线阵,该文给出了基于 COMET 的互耦和幅相误差联合校正方法.针对 COMET 中构造的目标函数,文中给出了两种交替迭代算法用以实现参数的优化计算,两种算法各有优势,仿真实验验证了算法的有效性,此外,与基于子空间技术的阵列误差校正方法相比,文中算法可直接利用信源时域统计特性,从而有利于提高参数估计精度。

参考文献

- [1] Fuhrmann D R. Estimation of sensor gain and phase[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(1): 77 - 87.
- [2] Cheng Q, Hua Y B, Stoica P. Asymptotic performance of optimal gain-and-phase estimators of sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(12): 3587 - 3590.
- [3] See C M S. Sensor array calibration in the presence of mutual coupling and unknown sensor gains and phases[J]. Electronics Letters, 1994, 30(5): 373 - 374.
- [4] 贾永康, 保铮, 吴涸. 一种阵列天线阵元位置、幅度及相位误差的有源校正方法[J]. 电子学报, 1996, 24(3): 47 - 52. Jia Yong-kang, Bao Zheng, Wu Huan. A new calibration technique with signal sources for position, gain and phase uncertainty of sensor array[J]. Acta Electronica Sinica, 1996, 24(3): 47 - 52. (in Chinese)
- [5] Friedlander B, Weiss A J. Direction finding in the presence of mutual coupling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1991, 39(3): 273 - 284.
- [6] 韩芳明, 张守宏, 潘复平. 阵列误差对 MUSIC 算法性能的影响与校正[J]. 西安电子科技大学学报, 2003, 30(5): 585 - 589. Han Fang-ming, Zhang Shou-hong, Pan Fu-ping. Effect of array uncertainty on the performance of MUSIC and its calibration [J]. Journal of Xidian University, 2003, 30(5): 585 - 589. (in Chinese)
- [7] Li Y M, Er M H. Theoretical analyses of gain and phase error calibration with optimal implementation for linear equispaced array[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(2): 712 - 723.
- [8] Fabrizio S, Alberto S. A novel mutual coupling compensation algorithm for uniform and linear arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(2): 560 - 573.
- [9] 王鼎, 郭钧霆, 叶国华, 吴瑛. 一种均匀线阵互耦和幅相误差校正算法[J]. 信号处理, 2010, 26(1): 38 - 45. Wang Ding, Wu Jun-ting, Ye Guo-hua, Wu Ying. A mutual coupling and gain-phase errors calibration algorithm for uniform

linear array[J]. Signal Processing, 2010, 26(1): 38 – 45. (in Chinese)

- [10] Wijnholds S J, Veen A J. Multisource self-calibration for sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(9): 3512 – 3522.
- [11] Astély D, Swindlehurst A, Ottersten B. Spatial signature estimation for uniform linear arrays with unknown receiver gains and phases[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(8): 2128 – 2138.
- [12] Ottersten B, Stoica P, Roy R. Covariance matching estimation techniques for array signal processing applications[J]. Digital Signal Processing, 1998, 8(3): 185 – 210.
- [13] Li H B, Stoica P, Li J. Computationally efficient maximum likelihood estimation of structured covariance matrices[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(5): 1314 – 1323.
- [14] Ottersten B, Viberg M, Kailath T. Analysis of subspace fitting and ML techniques for parameter estimation from sensor array data[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(3): 590 – 600.

作者简介



王 鼎 男, 1982 年出生于安徽芜湖, 现为信息工程大学博士研究生, 研究方向: 阵列信号处理.

E-mail: wang_ding814@yahoo.com.cn



姚 晖 男, 1985 年出生于江西上饶, 现为信息工程大学博士研究生, 研究方向: 阵列信号处理.

E-mail: yaohui56@sina.com

吴 瑛 女, 1960 年出生于河南郑州, 现为信息工程大学教授, 博士生导师, 研究方向: 阵列信号处理.